数理解析研究所講究録
1091 巻 1999 年 27-35

2つの cusp form の Fourier 係数の積に対する算術級数の素数定理と Rankin-Selberg L 関数の zero-free region

名古屋大学多元数理科学研究科
市原 由美子 (Yumiko Ichihara)

§1. 導入

Rankinは合同部分群に関する保型形式の Fourier係数の2乗平均について調べ、重さ k の保型形式 $f(z)$ の Fourier 係数 $a(n)$ について次の結果を得ている。(Rankin[9])

$$\sum_{n\leqq x}|a(n)|^2 = \alpha n^k + O(n^{k-\frac{2}{5}})$$

ここで、α は Petersson 内積 (f,f) の定数倍である。Selberg もほぼ同時期に $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の保型形式 $f(z), g(z)$ の Fourier係数 $a(n), b(n)$ の積に対する $n\leqq x$ の和の評価として、同様の結果を得ている。

この様な問題を考える際、$a^2(n)$ もしくは $a(n)b(n)$ を n 番目の係数に持つような Dirichlet 級数を扱うのが自然だが、これ自体を扱うよりも、その Dirichlet 級数とゼータ関数もしくは Dirichlet の L 関数との積を考えた方が扱いやすい。事実、上に述べた Rankin の結果は Riemann の ζ-関数 $\zeta(s)$ を用いて、

$$\zeta(2s-2k+2)\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|^2 n^{-s}$$

という関数について調べた結果である。この様な関数を考える最大の利点は関数等式をもつという点である。

さて、Perelli [8] は Dirichlet の L 関数を用いた次の式、

$$L(2s-2k+2, \chi^2)\sum_{n=1}^{\infty} a^2(n)\chi(n)n^{-s}$$

が関数等式を持つことから、この関数の zero-free region を調べ算術級数の素数定理のアナロジーをすることで、

$$\sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv a \pmod d}} a_p^2 \quad , \ (a,d)=1, \ (p\text{は素数})$$

に対しての評価を与えた。但し、ここで f は重さ k の $SL_2(\mathbb{Z})$ に対する normalized Hecke eigen cusp form とする。

さて、Perelli [8] を元に、$SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k, l の normalized Hecke eigen cusp form $f(z)$, $g(z)$ に対して、その n 番目の Fourier 係数 a_n, b_n について、

$$L(2s-k-l+2, \chi^2)\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \chi(n) n^{-s}$$

を考えることにより、

$$\sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv a \pmod d}} a_p b_p, \quad (a,d)=1, \ (p\text{は素数})$$

の評価をすることができたので、それを紹介する。ここで、χ は mod d で決まる Dirichlet 指標とする。

この結果を導くにあたり、谷川好男先生と松本耕二先生に大変お世話になりました。深く感謝致します。

§2 準備

f, g, χ は§1の最後で定めた通りとする。そこで、各素数 p に対して、α_p を $\alpha_p + \overline{\alpha_p} = a_p$, $|\alpha_p| = p^{\frac{k-1}{2}}$ を満たすものとして定める。同様に β_p も b_p に対して定める。この時、Rankin-Selberg L関数が次のように定義される。

$$L_{f\otimes g}(s, \chi) = \prod_p (1-\alpha_p\beta_p\chi(p)p^{-s})^{-1}(1-\alpha_p\overline{\beta_p}\chi(p)p^{-s})^{-1}$$
$$(1-\overline{\alpha_p}\beta_p\chi(p)p^{-s})^{-1}(1-\overline{\alpha_p}\,\overline{\beta_p}\chi(p)p^{-s})^{-1}$$

これは $Re(s) > \frac{k+l}{2}$ で絶対収束し、この範囲で

$$L_{f\otimes g}(s, \chi) = L(2s-k-l+2, \chi^2)\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \chi(n) n^{-s}$$

と級数表示されることが分かっている。

これから $L_{f\otimes g}(s, \chi)$ の零点の情報を調べるので、Euler積表示を持つことから、原始的な指標 χ についてのみを考えれば良いことが分かる。さて、χ が原始的なDirichlet指標である時、Li[6]により、このRankin-Selberg L関数は次の様な関数等式を持つことが知られている。

$k \geq l$ とする。$Re(s) > 1$ において

$$\Phi_{f\otimes g}(s, \chi) = \left(\frac{2\pi}{d}\right)^{-2s}\Gamma\left(s+\frac{k-l}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{k+l}{2}-1\right)L_{f\otimes g}\left(s+\frac{k+l}{2}-1, \chi\right)$$

とおくとき、

$$\Phi_{f\otimes g}(s, \chi) = C_\chi \Phi_{f\otimes g}(1-s, \overline{\chi})$$

が成り立つ。ここで C_χ は χ による大きさ1の定数。

また、Liは同じ論文で、$L_{f\otimes g}(s,\chi)$ は $d=1$ かつ $f=g$ の時 $s=1$ で1位の極を持ち、そこを除き複素平面全体に解析接続され、$d\neq 1$ または $f\neq g$ の時は整関数となることも述べている。$f=g$ の場合は既に調べられているので $f\neq g$ とする。

これらの情報からすぐに分かる $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ の零点の情報は定義より $\mathrm{Re}(s)>\frac{k+l}{2}$ で零点を持たず、関数等式を用いると、$\mathrm{Re}(s)<\frac{k+l}{2}-1$, $s=0,-1,-2,\cdots$ で2位の零点を持ち、更に、$s=1,2,\cdots l-1$ で1位の零点を持つことである。これらの零点を「自明な零点」と呼ぶ。従って、これから zero-free resion を調べるのは、$\frac{k+l}{2}-1\leqq \mathrm{Re}(s)\leqq\frac{k+l}{2}$ における零点（これを非自明な零点と呼ぶ）を調べることが目標となる。

§3 zero-free region I

今後、$s=\sigma+it$ とおく。Davenport [2] に従い、Dirichlet L関数の zero-free region の調べ方を参考にして $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ の zero-free region を調べる。

Proposition 1

χ は $d\geqq 2$ を法とする原始的な Dirichlet 指標。

この時、次を満たす正定数 C が存在する。

$$L_{f\otimes g}(s,\chi)\neq 0 \quad , \quad \sigma>\frac{k+l}{2}-\frac{C}{\log(d(|t|+2))}.$$

但し、これは χ が実指標の場合は実軸を除き成立。

証明.

$\sigma > \frac{k+l}{2}$ で次の関数を定義する。

$$\Phi_{f\otimes g}(\sigma+it,\chi) = -3\frac{L'_{f\otimes g}}{L_{f\otimes g}}(\sigma,\chi_0) - 4\frac{L'_{f\otimes g}}{L_{f\otimes g}}(\sigma+it,\chi) - \frac{L'_{f\otimes g}}{L_{f\otimes g}}(\sigma+2it,\chi^2)$$

ここで、χ_0 は mod d の単位指標である。$f=g$ であれば、Dirichlet の L 関数の場合と同様に $\mathrm{Re}\,\Phi_{f\otimes f} \geqq 0$ として証明することができるが、$f \neq g$ の時は $\mathrm{Re}\,\Phi_{f\otimes g} \geqq 0$ とはならない。

$$\mathrm{Re}\,\Phi_{f\otimes g}(\sigma+it,\chi) \geqq -\frac{1}{2}\Big\{\mathrm{Re}\,\Phi_{f\otimes f}\left(\sigma+\frac{k-l}{2}+it,\chi\right) + \mathrm{Re}\,\Phi_{g\otimes g}\left(\sigma+\frac{l-k}{2}+it,\chi\right)\Big\}$$

を用いて Dirichlet の L 関数の場合と同様の証明方法で $f \neq g$ の場合も主張を示すことができる。 □

次も Proposition 1 の証明中の不等式を用いて得られる。

Proposition 2

χ は $d \geqq 2$ を法とする原始的な Dirichlet 指標。$z \geqq 3$, $z \geqq d$ について $\beta > \frac{k+l}{2} - \frac{c}{\log z}$ を満たす $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ の実軸上の零点 β が重複度も込めて高々 1 つであるような正定数 c が存在する。

また、$d=1$ の時は実軸に関係なく Proposition 1 の結果が成り立つことも、Proposition 1 の証明中の不等式を用いて、示すことができる。

§4 zero-free region II

χ が $d \geqq 2$ を法とする実指標である時の実軸上における zero free region について調べる。つまり、Siegel の定理に対応する次の命題を示すことが目標である。

> Proposition 3
>
> χ は $d \geqq 2$ を法とする原始的な実指標とする。任意の ε $(\varepsilon > 0)$ に対して、次を満す正定数 $C(\varepsilon)$ が存在する。
>
> $$L_{f\otimes g}(\sigma, \chi) \neq 0 \quad , \quad \sigma > \frac{k+l}{2} - \frac{C(\varepsilon)}{d^{\varepsilon}}$$

この命題には $f = g$ の場合 Perelli は完全な証明を与えていないが、Golubeva-Fomenko [3] によりフォローされている。ただし Golubeva-Fomenko [3] で述べられている $\sum_{n \leq x} a_n^2 \chi(n)$ の評価には完全な証明が与えられていないが、（実際はこの評価を求めずとも Carlitti-Monti Bragadin-Perelli [1] の定理2や Phragmén-Lindelöf の定理より Siegel の定理の証明に必要な情報を得ることができる。）Rankin-Selberg L 関数の Dirichlet 級数表示における係数 C_n に対して Hafner [4] が $\sum_{n \leq x} C_n (x-n)^{\rho} \cdot \Gamma(\rho+1)^{-1}$, $\rho \in \mathbb{R}$ に Voronoï-formula を与えたことから、Golubeva-Fomenko [3] の Lemma を参考にして、より一般的に、$^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して

$$\sum_{n \leq x} a_n b_n \chi(n) \ll x^{\frac{3}{5}+\varepsilon} d^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$$

が得られる。さて、Proposition 3 の証明を紹介しよう。

証明.

$f=g$の場合は示されているので、$f\neq g$の場合について示す。$\sigma>1$において次の正則な関数$F(s)$を定義する。Ogg[7]を参照しても分かるように、これが一番単純な補助関数であると思われる。

$$F_{f\otimes g}(s)=L_{f\otimes g}(s+\tfrac{k+l}{2}-1)L_{f\otimes g}(s+\tfrac{k+l}{2}-1,\chi_1)$$
$$L_{f\otimes g}(s+\tfrac{k+l}{2}-1,\chi_2)L_{f\otimes g}(s+\tfrac{k+l}{2}-1,\chi_1\chi_2)$$

とおいた時、

$$F(s)=F_{f\otimes f}(s)F^2_{f\otimes g}(s)F_{g\otimes g}(s)$$

ここで、χ_1, χ_2はそれぞれ$\bmod d_j$ ($d_i\geqq 2$, $j=1,2$) の原始的な実指標で$\chi_1\chi_2$が単位指標とならないものである。

この補助関数を用いてSiegelの定理と同様に証明をすると、

$$F(s)\geqq\frac{1}{2}-\frac{C(|\lambda_1|+|\lambda_2|)}{(\sigma-1)^2}(d_1d_2)^{C'(1-\sigma)+\varepsilon}$$

が得られる。ここでC, C'は正定数であり、$\lambda_2=(F(s)(s-1)^2)\big|_{s=1}$
$\lambda_1=(F(s)(s-1)^2)'\big|_{s=1}$である。(定義より$F(s)$が$s=1$で2位の極をもつことはすぐ分かる)

$F(s)$の定義で$F(s)$が$L^2_{f\otimes g}(s+\frac{k+l}{2}-1,\chi_2)$を因子に持つことが効き、$\lambda_j\ll L_{f\otimes g}(\frac{k+l}{2},\chi_2)(d_1d_2)^{\varepsilon}$, $j=1,2$と評価できるので、

$$F(s)\geqq\frac{1}{2}-\frac{C\,L_{f\otimes g}(\frac{k+l}{2},\chi_2)}{(\sigma-1)^2}(d_1d_2)^{C'(1-\sigma)+\varepsilon}$$

が導け、Siegelの定理と同様に主張を導ける。 □

また、Proposition 3 の証明中に用いた補助関数を再び利用することで次も導ける。

Proposition 4

$d \geqq 2$ を法とする単位指標でない実指標 χ 達について、それぞれ $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ を考える。適当に正定数 c をとると

$$\sigma > \frac{k+l}{2} - \frac{c}{\log(d(|t|+2))}, \quad t=0$$

で零点をもつような $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ はただ1つで、その零点も重複度を入れて高々1つである。

§5 主定理

これまでに得た zero-free region を用いて算術級数の素数定理のアナロジーをすることにより、$f \neq g$ の場合次を得る。

Theorem

N は正の定数とし、$(d,a)=1$ である時

$$\sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv a \pmod{d}}} a_p b_p = O\left(x^{\frac{k+l}{2}} \exp\left(-c\sqrt{\log x}\right)\right)$$

が成り立つ。但し、$d \leqq (\log x)^N$ で、c は正定数。

この時、$L_{f\otimes g}(s,\chi)$ は極を持たないことから、$f=g$ の場合と違って main term は現れない。

References

[1] E. Carleti, G. Monti Bragadin and A. Perelli, On general L-functions, Acta Arith. 66 (1994) 147–179.

[2] H. Davenport, Multiplicative Number Theory (2nd. ed.), Springer-Verlag (1980).

[3] E.P. Golubeva and O.M. Fomenko, Values of Dirichlet series associated with modular forms at the points $s = \frac{1}{2}, 1$, J. Soviet Math. 36 (1987) 79–93.

[4] J. L. Hafner, On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions, Lec. Notes in Math. 899, Springer-Verlag (1981) 148–165.

[5] Y. Ichihara, The Siegel-Walfisz theorem for Rankin-Selberg L-functions associated with two cusp forms, preprint.

[6] W. Li, L-Series of Rankin type and their functional equations, Math. Ann. 244 (1979) 135–166.

[7] A. P. Ogg, On a convolution of L-series, Invent. Math. 7 (1969) 297–312.

[8] A. Perelli, On the prime number theorem for the coefficients of certain modular forms, Banach Center Pub. vol 17 (1985) 405–410.

[9] R. A. Rankin, Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions II, Proc. Cambridge Philos Soc. 35 (1931) 357–372.